1. Să se calculeze determinantul $D = \left|\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{smallmatrix}\right|$. **(6 pct.)**

   a) $D = 0$; b) $D = 14$; c) $D = 3$; d) $D = 11$; e) $D = 4$; f) $D = 1$.

   **Soluţie.** Aplicând regula lui Sarrus, $\left|\begin{smallmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ m & n & p \end{smallmatrix}\right| = aep + bfm + dnc - (mec + dbp + nfa)$, obţinem $D = 1 \cdot 0 \cdot 6 + 2 \cdot 3 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \cdot 3 - (2 \cdot 0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 6 + 4 \cdot 3 \cdot 1) = 0$, deci $D = 0$. (a)

   *Altfel.* Se observă că linia a treia a determinantului este dublul celei dintâi, deci determinantul având două linii proporţionale, este nul.

   *Altfel.* Se observă că a doua coloană este dubla celei dintâi, deci determinantul având două coloane proporţionale, este nul.

   *Altfel.* Se observă că a treia coloană este tripla celei dintâi, deci $D = 0$.

   *Altfel.* Dezvoltând după o linie sau după o coloană oarecare, calculul se reduce la determinanţi de ordinul doi; se obţine $D = 0$.

   *Altfel.* Se fabrică zerouri pe o linie sau pe o coloană a determinantului; se obţine fie o linie nulă, fie o coloană nulă, deci $D = 0$.

2. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ şi fie funcţia derivabilă $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, cu derivata $f'$ funcţie continuă. Ştiind că $f'(x) + (f(x))^2 + 1 \geq 0$, $\forall x \in (a, b)$ şi că $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x) = -\infty$, decideţi care dintre următoarele afirmaţii este cea adevărată: **(6 pct.)**

   a) $b - a \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$; b) $b - a \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$; c) $b - a \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$; d) $b - a \in \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$; e) $b - a \in [\pi, \infty)$; f) $b - a \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right)$.

   **Soluţie.** Se observă că inegalitatea din enunţ se rescrie

   $$f'(x) + (f(x))^2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{f'}{1 + f^2} \geq -1 \Leftrightarrow (x + \operatorname{arctg} f(x))' \geq 0.$$

   Notând $g(x) = x + \operatorname{arctg} f(x)$, avem $g'(x) \geq 0$, deci $g$ crescătoare pe $(a, b)$. Trecând la limită si folosind limitele din enunţ, obţinem $\lim\limits_{x \searrow -\infty} g(x) = a + \dfrac{\pi}{2}$ şi $\lim\limits_{x \nearrow \infty} g(x) = b - \dfrac{\pi}{2}$. Din monotonia funcţiei $g$, rezultă $a + \frac{\pi}{2} < b - \frac{\pi}{2}$, deci $b - a \geq \pi$. (e)

3. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + e^x$. Să se calculeze $f'(0)$. **(6 pct.)**

   a) 0; b) 3; c) $-5$; d) 4; e) 2; f) $-2$.

   **Soluţie.** Derivând funcţia $f$ termen cu termen, obţinem $f'(x) = 1 + e^x$, deci $f'(0) = 1 + 1 = 2$. (e)

4. Fie $A = \{|z^n + \frac{1}{z^n}| \mid n \in \mathbb{N},\ z \in \mathbb{C},\ z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0\}$. Să se determine suma pătratelor elementelor mulţimii $A$. **(6 pct.)**

   a) 7; b) 5; c) 10; d) 9; e) 1; f) 4.

   **Soluţie.** Se observă că rădăcinile polinomului $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$ sunt cele diferite de 1 ale polinomului $z^5 - 1 = (z - 1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$, deci $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, unde am notat $\omega_k = \omega^k = \cos\frac{2k\pi}{5} + i \sin\frac{2k\pi}{5}$, unde $k \in \mathbb{Z}$, iar $\omega = \omega_1 = \cos\frac{2\pi}{5} + i \sin\frac{2\pi}{5}$. Se poate verifica direct egalitatea $\omega^m = \omega^r$, pentru $m \in \mathbb{Z}$ iar $m = 5q + r$ împărţirea cu rest la 5 a numărului întreg $m$. Au loc relaţiile $\frac{1}{\omega_k} = \bar{\omega}_k = \omega_{-k}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$ şi $\omega_m + \frac{1}{\omega_m} = \omega_{-m} + \frac{1}{\omega_{-m}}$, $\forall m \in \mathbb{Z}$. Atunci mulţimea $A$ se rescrie succesiv:

   $$\begin{aligned} A &= \{|z^n + \tfrac{1}{z^n}| \mid n \in \mathbb{N},\ z \in \mathbb{C},\ z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0\} \\ &= \{|z^n + \tfrac{1}{z^n}| \mid n \in \mathbb{N},\ z \in \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}\} = \{|\omega_m + \bar{\omega}_m| \mid m \in \overline{1, 5}\} \\ &= \{|\omega_m + \bar{\omega}_m| \mid m \in \overline{-2, 2}\} = \{|\omega_m + \omega_{-m}| \mid m \in \overline{0, 2}\}. \end{aligned}$$

Folosind egalitatea $|z|^2 = z\bar{z}$ şi consecinţa formulei Moivre $(\omega_k)^s = \omega_{ks}$, rezultă suma pătratelor elementelor mulţimii $A$,

$$\begin{aligned} S &= |1+1|^2 + |\omega_1+\omega_{-1}|^2 + |\omega_2+\omega_{-2}|^2 = 4 + (\omega_1+\omega_{-1})\overline{(\omega_1+\omega_{-1})} + (\omega_2+\omega_{-2})\overline{(\omega_2+\omega_{-2})} \\ &= 4 + (\omega_1+\omega_4)(\omega_4+\omega_1) + (\omega_2+\omega_3)(\omega_3+\omega_2) = 4 + (\omega_1+\omega_4)^2 + (\omega_2+\omega_3)^2 \\ &= 4 + (\omega_2 + 2\omega_5 + \omega_8) + (\omega_4 + 2\omega_5 + \omega_6) = 4 + \omega_2 + 2\cdot 1 + \omega_3 + \omega_4 + 2\cdot 1 + \omega_1 \\ &= 7 + (\omega_0+\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4). \end{aligned}$$

Dar suma celor cinci rădăcini de ordinul cinci ale unităţii fiind nulă (din prima relaţie Viete pentru polinomul $z^5-1$), rezultă anularea parantezei, deci $S = 7 + 0 = 7$. ⓐ

5. Fie matricea $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Să se calculeze determinantul matricei $A^2$. **(6 pct.)**

   a) 25; b) 16; c) 15; d) 0; e) 9; f) 4.

   **Soluţie.** Calculăm $A^2 = A\cdot A = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{smallmatrix}\right)$; aplicând formula $\left|\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right| = ad - bc$, rezultă $\det A^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$. ⓔ

   *Altfel.* Folosim proprietatea că pentru orice matrice pătratică $A$ şi orice număr natural $m \geq 1$, avem $\det A^m = (\det A)^m$. Cum $\det A = 2\cdot 2 - 1\cdot 1 = 3$, rezultă $\det A^2 = (\det A)^2 = 3^2 = 9$.

6. Suma soluţiilor reale ale ecuaţiei $x^3 - 3x^2 - 5x = 0$ este: **(6 pct.)**

   a) 8; b) $-5$; c) 6; d) 3; e) 5; f) 7.

   **Soluţie.** Polinomul se rescrie $x^3 - 3x^2 - 5x = x(x^2 - 3x - 5)$. Avem deci o primă rădăcină $x_1 = 0$, soluţie reală a ecuaţiei date. Celelalte două soluţii complexe ale ecuaţiei sunt rădăcinile $x_{2,3} = \frac{3\pm\sqrt{20}}{2}$ ale polinomului de gradul doi $x^2 - 3x - 5$, care sunt ambele reale. Deci suma soluţiilor reale ale ecuaţiei date este $x_1 + x_2 + x_3 = 0 + \frac{3+\sqrt{20}}{2} + \frac{3-\sqrt{20}}{2} = 3$. ⓓ *Observaţie.* Se verifică uşor că în cazul nostru rădăcinile fiind toate reale, suma obţinută coincide cu cea dată de prima egalitate Viete, $-\frac{-3}{1} = 3$. În general însă, prima formulă Viete produce suma rădăcinilor *complexe* ale polinomului. În cazul în care polinomul de grad trei ar avea doar o rădăcină reală, iar celelalte două complexe conjugate însă, această sumă nu ar produce rezultatul cerut. Din acest motiv este necesar să se determine dacă există şi rădăcini complexe ne-reale (iar în acest caz rădăcinile reale trebuie determinate efectiv), fie dacă toate rădăcinile sunt reale (iar în acest caz prima relaţie Viete produce rezultatul cerut). ⓓ

7. Să se rezolve sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x - y = 2 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$ în mulţimea numerelor reale. **(6 pct.)**

   a) $x = 2$, $y = 1$; b) $x = 1$, $y = 3$; c) $x = -3$, $y = 5$; d) $x = 3$, $y = 1$; e) $x = y = 2$; f) $x = 1$, $y = 2$.

   **Soluţie.** Scăzând a doua ecuaţie din prima, rezultă imediat $2y = 2 \Leftrightarrow y = 1$. Apoi, înlocuind în prima ecuaţie, obţinem $x - 1 = 2 \Leftrightarrow x = 3$. Prin urmare avem $x = 3$, $y = 1$. ⓓ

   *Altfel.* Discriminantul sistemului de 2 ecuaţii cu 2 necunoscute este $\left|\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{smallmatrix}\right| = -2 \neq 0$, deci sistem Cramer compatibil determinat. Aflăm soluţia unică a sistemului aplicând regula lui Cramer:

   $$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{1}{\Delta}\left|\begin{smallmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -3 \end{smallmatrix}\right| = 3, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{1}{\Delta}\left|\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right| = 1,$$

   deci soluţia sistemului este dată de $x = 3$, $y = 1$.

8. Suma pătratelor soluţiilor ecuaţiei $x^2 + x - 2 = 0$ este: **(6 pct.)**

   a) 2; b) 4; c) 7; d) 10; e) 5; f) 1.

   **Soluţie.** Rezolvând ecuaţia de gradul doi, obţinem soluţiile $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, deci $x_1^2 + x_2^2 = 1^2 + (-2)^2 = 5$. ⓔ

   *Altfel.* Dacă $x_{1,2}$ sunt cele două soluţii ale ecuaţii, atunci $x_1^2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2$. Din relaţiile Viete avem însă $x_1 + x_2 = -\frac{1}{1} = -1$, iar $x_1x_2 = \frac{-2}{1} = -2$, deci $x_1^2 + x_2^2 = (-1)^2 - 2\cdot(-2) = 5$.

9. Mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei $\sqrt{x+3} - x = 1$ este: **(6 pct.)**

   a) $\{-1, 3\}$; b) $\{-3, 0\}$; c) $\{3, 4\}$; d) $\{-2, 3\}$; e) $\{1\}$; f) $\varnothing$.

**Soluţie.** Ecuaţia se rescrie $\sqrt{x+3} = x+1$. Condiţia de existentă a radicalului este $x+3 \geq 0$, deci $x \geq -3$. De asemenea membrul drept, fiind egal cu un radical, trebuie să fie nenegativ, deci $x \geq -1$. În concluziile, din condiţiile induse de radical, obţinem $x \geq -1$. Ridicând ecuaţia la pătrat, rezultă $x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x \in \{1, -2\}$. Convine doar soluţia $x = 1 \geq -1$. ⓔ

*Altfel.* După ridicare la pătrat, ecuaţia devine $x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x \in \{1, -2\}$. Dar prin înlocuire în ecuaţia dată, se constată că dintre cele două valori obţinute, doar $x = 1$ satisface ecuaţia. Deci unica soluţie a ecuaţiei este $x = 1$.

10. Să se rezolve ecuaţia $2^{x+1} = 16$. **(6 pct.)**

a) $x = 3$; b) $x = -1$; c) $x = 4$; d) $x = 2$; e) $x = \frac{1}{2}$; f) $x = 6$.

**Soluţie.** Logaritmând egalitatea în baza 2, obţinem $x+1 = \log_2 16 \Leftrightarrow x+1 = \log_2 2^4 \Leftrightarrow x+1 = 4 \Leftrightarrow x = 3$, deci $x = 3$. ⓐ

11. Să se rezolve inecuaţia $7x + 2 > 5x + 4$. **(6 pct.)**

a) $x \in (1, \infty)$; b) $x \in (-4, -3)$; c) $x \in (-3, 0)$; d) $x \in \varnothing$; e) $x \in (-\infty, -4)$; f) $x \in (0, 1)$.

**Soluţie.** Ecuaţia se rescrie $2x > 2 \Leftrightarrow x > 1$, deci $x \in (1, \infty)$. ⓐ

12. Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel încât numerele $2, 4, x$ (în această ordine) să fie în progresie geometrică. **(6 pct.)**

a) $x = 8$; b) $x = 5$; c) $x = 9$; d) $x = 11$; e) $x = 14$; f) $x = 18$.

**Soluţie.** Condiţia de progresie geometrică a trei termeni este ca termenul din mijloc sa fie media geometrică a celorlalţi doi termeni, deci $4 = \sqrt{2 \cdot x} \Leftrightarrow 2x = 16 \Leftrightarrow x = 8$. ⓐ

*Altfel.* Dacă notăm cu $a = 2$ primul termen al progresiei şi cu $q$ raţia acesteia, obţinem $4 = a \cdot q$, deci $q = \frac{4}{a} = 2$ şi deci $x = a \cdot q^2 = 2 \cdot 2^2 = 8$.

13. Fie polinomul $f = 1 + \sum_{k=0}^{100} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} X(X-1)\ldots(X-k)$. Dacă $S$ este suma rădăcinilor reale ale lui $f$, iar $T$ este suma rădăcinilor reale ale lui $f'$, atunci $S - T$ este egal cu: **(6 pct.)**

a) 50; b) 52; c) 55; d) 51; e) 54; f) 53.

**Soluţie.** Pentru $m \in \overline{1, 101}$ fixat, notăm $T_k(m) = \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} m(m-1) \cdot \ldots \cdot (m-k)$. Atunci

$$f(m) = 1 + \sum_{k=0}^{100} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} m(m-1) \cdot \ldots \cdot (m-k) = 1 + \sum_{k=0}^{100} T_k(m).$$

Se observă că pentru $k \in \overline{m+1, 101}$, avem $T_k(m) = 0$, iar pentru $k \in \overline{1, m}$, avem $T_k(m) = (-1)^{k+1} C_m^{k+1}$. Deci pentru $m \in \overline{1, 101}$, rezultă

$$f(m) = 1 + \sum_{q=1}^{m} (-1)^q C_m^q = C_m^0 - C_m^1 + C_m^2 - C_m^3 + \ldots + (-1)^{100} C_{100}^{100} = (1-1)^{100} = 0.$$

Prin urmare valorile $\{1, \ldots, 101\}$ sunt 101 rădăcini reale distincte ale polinomului $f$ de grad 101. Deci $P$ având gradul 101, acestea sunt toate rădăcinile polinomului, care va fi de forma

$$P(x) = a \cdot (x-1)(x-2) \cdot \ldots \cdot (x-101).$$

Este evident că suma rădăcinilor reale ale acestuia este $1 + 2 + \ldots + 101 = \frac{101 \cdot 102}{2} = 5151$.

Pe de altă parte, înlocuind $x = 0$ atât în expresia din enunţ a lui $P$, cât şi în expresia de mai sus a acestuia, rezultă $P(0) = 1$, respectiv

$$P(0) = a \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot \ldots (-101) = a \cdot (-1)^{101} \cdot 101! = -a \cdot 101!$$

deci avem egalitatea $1 = -a \cdot 101!$, din care obţinem $a = -\frac{1}{101!}$. Prin urmare, polinomul admite scrierea echivalentă:

$$P(x) = -\frac{1}{101!}(x-1) \cdot (x-2) \cdot \ldots \cdot (x-101).$$

Derivând expresia de mai sus a polinomului $P$, obţinem

$$P'(x) = -\frac{1}{101!}\sum_{k=1}^{101}(x-1)\cdot\ldots\cdot\widehat{(x-k)}\cdot\ldots\cdot(x-101),$$

un polinom de grad 100. Folosind consecinţa teoremei lui Rolle, derivata $P'$ are cel puţin 100 de rădăcini distincte aflate în intervalele consecutive $(1,2),(2,3),\ldots,(100,101)$ determinate de rădăcinile lui $P$. Gradul lui $P$ fiind 100, rezultă că acestea sunt exact rădăcinile, toate reale, ale lui $P'$. Pentru a afla suma $T$ a rădăcinilor reale ale derivatei, folosim prima egalitate Viete. Examinând expresia lui $P'$ de mai sus, rezultă coeficientul monomului de grad maxim $x^{100}$ al lui $P'$,

$$C_{x^{100}} = -\frac{1}{101!}\cdot 101 = -\frac{1}{100!}.$$

Pe de altă parte, coeficientul monomului $x^{99}$ din $P'$ este

$$\begin{aligned} C_{x^{99}} &= -\tfrac{1}{101!}\cdot\sum_{k=1}^{101}\sum_{s\in\overline{1,101}\setminus\{k\}}(-s) = -\frac{1}{101!}\cdot\sum_{k=1}^{101}[-(1+2+\ldots+\hat{k}+\ldots+101)] \\ &= -\tfrac{1}{101!}\cdot\sum_{k=1}^{101}\{-[(1+2+\ldots+101)-k]\} = -\frac{1}{101!}\cdot\sum_{k=1}^{101}\left[-\left(\frac{101\cdot 102}{2}-k\right)\right] \\ &= -\tfrac{1}{101!}\cdot\sum_{k=1}^{101}(k-5151) = -\frac{1}{101!}\cdot(5151-101\cdot 5151) = 5151\cdot\frac{1}{101\cdot 99!}. \end{aligned}$$

Atunci suma rădăcinilor reale (care coincide cu suma rădăcinilor complexe în acest caz) este, conform primei relaţii Viete:

$$T = -\frac{C_{x^{99}}}{C_{x^{100}}} = -\frac{5151}{101\cdot 99!}\cdot\frac{100!}{1} = \frac{5151}{101}\cdot 100 = 5100.$$

Deci $S-T = 5151-5100 = 51$. (d)

14. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = |x|e^{-x}$. Fie $n$ numărul punctelor de extrem local şi $m$ numărul punctelor de inflexiune ale funcţiei $f$. Care dintre următoarele afirmaţii este cea adevărată? **(6 pct.)**

a) $n+m=4$; b) $n-m=2$; c) $3n-2m=4$; d) $n+2m=5$; e) $3n+2m=5$; f) $n-2m=1$.

**Soluţie.** Explicitând modulul şi derivând, se obţine:

$$f(x) = \begin{cases} -xe^{-x}, & x\le 0 \\ xe^{-x}, & x>0 \end{cases}, \quad f'(x) = \begin{cases} e^{-x}(x-1), & x<0 \\ e^{-x}(1-x), & x>0 \end{cases}, \quad f''(x) = \begin{cases} e^{-x}(2-x), & x<0 \\ e^{-x}(x-2), & x>0 \end{cases}.$$

Se obţin succesiv rezultatele: ${f'}_s(0) = -1<0$, ${f'}_d(0) = 1>0$, deci $x=0$ punct unghiular, de minim. De asemenea, $f'(1)=0$, $f''(1) = -\frac{1}{e}<0$, punct de extrem cu $f$ concavă, deci punct de maxim. Deoarece dintre punctele de derivabilitate $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ ale lui $f$, avem $f''(x)=0 \Leftrightarrow x=2$, rezultă un singur punct de inflexiune, în $x=2$. În concluzie, $n=2$ şi $m=1$, deci singura egalitate validă dintre variante este $3n-2m=4$. (c)

15. Să se rezolve ecuaţia $\log_3(x-1)=2$. **(6 pct.)**

a) $x=14$; b) $x=11$; c) $x=7$; d) $x=8$; e) $x=10$; f) $x=3$.

**Soluţie.** Condiţia de existenţă a logaritmului conduce la $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$. Aplicând ecuaţiei funcţia exponenţială de bază 3, obţinem $x-1=3^2 \Leftrightarrow x=10$, care satisface condiţia $x>1$. (e)