1. Fie curba de ecuaţie $y = 2x^3 + 4x$. Aflaţi $m \in \mathbb{R}$ ştiind că dreapta de ecuaţie $y = mx + 4$ este tangentă la curbă.

   a) $m = 10$; b) $m = -1$; c) $m = 8$; d) $m = 2$; e) $m = 12$; f) $m = -6$.

   Soluţie. Eliminând y din sistemul liniar $\begin{cases} y = 2x^3 + 4x \\ y = mx + 4 \end{cases}$, rezultă $2x^3 + 4x = mx + 4$. Este necesar şi suficient ca ecuaţia $f(x) \equiv 2x^3 + (4 - m)x - 4 = 0$ sa aibă o radacină multiplă reală. Din relaţiile lui Viéte rezultă $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ şi $x_1x_2x_3 = 2$. Folosind condiţia $x_1 = x_2$, obţinem $x_3 = -2x_1$ şi $-2x_1^3 = 2$. Avem deci $x_1 = -1$. Deoarece $f(-1) = 0$, avem $m = 10$.

   Altfel. După obţinerea rădăcinii duble $x_1 = -1$, calculăm $x_3 = -2x_1 = 2$, iar din a doua relaţie Viéte obţinem
   $$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{4-m}{2} \Leftrightarrow -3 = \frac{4-m}{2} \Leftrightarrow m = 10.$$

2. Fie N numărul de soluţii reale ale ecuaţiei $2^x = x^2$. Decideţi dacă:

   a) $N = 0$; b) $N = 3$; c) ecuaţia are numai soluţii întregi; d) $N = 4$; e) $N = 1$; f) $N = 2$.

   Soluţie. Observam ca $x = 0$ nu este solutie deci distingem cazurile $x < 0$ şi $x > 0$.

   1. Considerăm mai intâi $x < 0$. Notăm $y = -x > 0$ şi deci $1 = y^2 2^y$. Funcţia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(y) = y^2 \cdot 2^y - 1$ este strict crescătoare ca produs a două funcţii strict crescătoare minus o funcţie constantă şi deci injectivă. Cum $\lim\limits_{x \searrow 0} f(0) = -1 < 0$ şi $f(1) = 1 > 0$, rezultă f are soluţie unică, $y_1 \in (0, 1)$. Deci ecuaţia dată are o singură soluţie în intervalul $(-\infty, 0), x_1 = -y_1 < 0$.

   2. Pentru $x > 0$, Se observă că ecuaţia admite soluţiile $x_2 = 2$ şi $x_3 = 4$. Verificăm că acestea sunt singurele soluţii strict pozitive. Ecuaţia se rescrie $x \ln 2 = 2 \ln x$. Fie $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, g(x) = x \ln 2 - 2 \ln x$, deci $g'(x) = \ln 2 - \frac{2}{x}$. Avem $g'(x_0) = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{2}{\ln 2}$. Pe de altă parte, avem $\lim\limits_{x \searrow 0} g(x) = +\infty$ şi $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, iar $g(2) = 0, g(4) = 0$. Dar $x_0 \in (2, 4)$ este singura radacină a derivatei g', deci, folosind şirul lui Rolle, se deduce că $x_2 = 2$ şi $x_3 = 4$ sunt singurele soluţii ale ecuaţiei $g(x) = 0$ în intervalul $(0, +\infty)$. Concluzionăm că ecuaţia $2^x = x^2$ are 3 rădăcini reale, $x_1 \in (-\infty, 0)$, $x_2 = 2$ şi $x_3 = 4$.

3. Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} \int\limits_{x+3}^{2x+3} t\sqrt{t^3 + 9}\ dt$.

   a) 14; b) ∞; c) 10; d) 20; e) 18; f) 0.

   Soluţie. Funcţia continuă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(t) = t\sqrt{t^3 + 9}$ admite primitive F. Deci $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \int_{x+3}^{2x+3} f(t)dt = \lim_{x \to 0} \frac{F(2x+3) - F(x+3)}{x}$, deci folosind regula l'Hospital (cazul 0/0), rezultă
   $$\lim_{x \to 0} \frac{2f(2x+3) - f(x+3)}{1} = 2f(3) - f(3) = 3\sqrt{3^3 + 9} = 18.$$

4. Fie $e_1 = (1, -1, 0)$ şi $e_2 = (1, 1, 0)$. Să se precizeze pentru care din vectorii e_3 de mai jos, vectorii e_1, e_2, e_3 sunt liniar independenţi în $\mathbb{R}^3$.

   a) $e_3 = (2, -2, 0)$; b) $e_3 = (-2, 2, 0)$; c) $e_3 = (0, 0, 1)$; d) $e_3 = (5, 5, 0)$;
   e) $e_3 = (0, 0, 0)$; f) $e_3 = (2, 3, 0)$.

   Soluţie. Dacă $e_3 = (a, b, c)$, atunci condiţia $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ a & b & c \end{vmatrix} \neq 0$ implică $c \neq 0$, deci răspunsul corect este $(0, 0, 1)$.

5. Soluţiile x_1, x_2, x_3 ale ecuaţiei $x^3 - 3x - 10 = 0$ satisfac condiţiile

   a) $x_1 = x_2 \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}, x_3 \in \mathbb{C}$; b) $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$; c) $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$;
   d) $x_1 \in \mathbb{R}, x_2, x_3 \in \mathbb{C}\backslash\ \mathbb{R}$; e) $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_3 \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$; f) $x_1 = x_2 \in \mathbb{R}, x_3 \in \mathbb{C}$.

Soluţie. Pentru ecuaţia $f(x) = x^3 - 3x - 10 = 0$, întocmim şirul lui Rolle. Avem $f'(x) = 3x^2 - 3$ şi deci $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1, 1\}$. Dar

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty < 0, \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty, \quad f(-1) = -8 < 0, f(1) = -12 < 0,$$

deci $x_1 \in \mathbb{R}$ şi $x_2, x_3 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ (unde numerotarea celor trei radacini este aleatoare).

6. Să se determine parametrul $m \in \mathbb{R}$ dacă graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 2(m+1)x^2 + (m^2 + 2m + 2)x - 2m$, intersectează axa Ox în trei puncte distincte.

   a) $m \in \left(-\infty, -2 - 2\sqrt{2}\right) \cup \left(-2 + 2\sqrt{2}, \infty\right)$; b) $m \neq 1$;
   c) $m \in \left(-2 - 2\sqrt{2}, -2 + 2\sqrt{2}\right)$;
   d) $m \in \left(-\infty, -2 - 2\sqrt{2}\right) \cup \left(-2 + 2\sqrt{2}, 1\right) \cup (1, \infty)$;
   e) nu există m; f) $m \neq -2 + 2\sqrt{2}$.

   Soluţie. Rezolvăm ecuaţia $f(x) = 0$. Se observa ca $x = m$ este soluţie, deci $f(x) = (x - m)(x^2 - mx - 2x + 2) = (x - m)(x^2 - x(m + 2) + 2)$. Graficul intersectează axa Ox in trei puncte distincte dacă ecuaţia $f(x) = 0$ are 3 rădăcini distincte. Avem $x_1 = m$ (o radacină) iar pentru $x^2 - x(m + 2) + 2 = 0$ impunem condiţiile: $\triangle > 0$ şi $x_1 = m$ să nu fie radacină. Obţinem $\triangle = (m + 2)^2 - 8 > 0 \Leftrightarrow (m + 2)^2 > 8 \Leftrightarrow |m + 2| > 2\sqrt{2} \Leftrightarrow m \in (-\infty, -2 - 2\sqrt{2}) \cup (-2 + 2\sqrt{2}, \infty)$. Pe de altă parte, $x = m$ nu este rădăcina pentru ecuaţia de grad 2 d.n.d. $f(m) \neq x^2 - x(m + 2) + 2 \Leftrightarrow m \neq 1$. Deci soluţia finală este $m \in (-\infty, -2 - 2\sqrt{2}) \cup (-2 + 2\sqrt{2}, 1) \cup (1, \infty)$.

7. Să se găsească $\mathbf{l} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(n + 2 - \sqrt{n^2 + n + 3}\right)$.

   a) $\mathbf{l} = -1$; b) nu există; c) $\mathbf{l} = \frac{3}{2}$; d) $\mathbf{l} = \infty$; e) $\mathbf{l} = 0$; f) $\mathbf{l} = 1$.

   Soluţie. Raţionalizând, obţinem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n + 2)^2 - (n^2 + n + 3)}{n + 2 + \sqrt{n^2 + n + 3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n + 1}{n + 2 + \sqrt{n^2 + n + 3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(3 + \frac{1}{n}\right)}{n\left(1 + \frac{2}{n} + \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}}\right)} = \frac{3}{2}.$$

8. Primitivele $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$ sunt

   a) $x + \operatorname{tg} x + C$; b) $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C$; c) $x + \operatorname{ctg} x + C$; d) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + C$; e) $\frac{1}{\cos^2 x} + C$; f) $\frac{1}{\sin^2 x} + C$.

   Soluţie. Folosind formula $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, putem scrie

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$$

9. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x - 1) + e^{x^2}$. Să se calculeze $f'(1)$.

   a) 1; b) 0; c) e^2; d) 2e; e) e; f) $\frac{1}{\mathrm{e}}$.

   Soluţie. Avem $f'(x) = -\sin(x - 1) + 2xe^{x^2}$, deci $f'(1) = 2e$.

10. Să se rezolve inecuaţia $\dfrac{1 - x}{x} > 0$.

    a) $(0, 1)$; b) $(-1, 0)$; c) $[-1, 1]$; d) nu are soluţii; e) $[0, 1)$; f) $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$.

    Soluţie. Avem $\frac{1-x}{x} > 0 \Leftrightarrow (x - 1) \cdot \frac{1}{x} < 0 \Leftrightarrow x \in (0, 1)$.

11. Pe mulţimea $\mathbb{R}^3$ se defineşte legea de compoziţie $(x_1, y_1, z_1) \star (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 \cdot z_2)$. Găsiţi elementul neutru.

    a) $(1, 0, 1)$; b) $(0, 1, 0)$; c) $(0, 1, 1)$; d) $(1, 1, 0)$; e) $(1, 0, 0)$; f) $(0, 0, 1)$.

    Soluţie. Aratăm că există $(e_1, e_2, e_3) \in \mathbb{R}^3$ astfel încât pentru orice $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ avem $(e_1, e_2, e_3) \star (x, y, z) = (x, y, z) \star (e_1, e_2, e_3) = (x, y, z)$, adică $e_1 + x = x, e_2 + y = y, e_3 z = z \Rightarrow e_1 = 0, e_2 = 0, e_3 = 1$, deci elementul neutru este $(0, 0, 1)$.

12. Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^2+x+1, & x>0 \\ ax+b, & x\le 0\end{cases}$ este continuă, dacă

a) $a=1$, $b\in\mathbb{R}$; b) $a=-1$, $b=2$; c) $a=1$, $b=2$; d) $a=1$, $b>1$;
e) $a=b=-1$; f) $a\in\mathbb{R}$, $b=1$.

Soluţie. Cum f este continuă pe $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$ este suficient să punem condiţiile pentru continuitate în 0, adică

$$\lim_{x\searrow 0}(x^2+x+1)=\lim_{x\nearrow 0}(ax+b)=f(0)\Rightarrow\begin{cases} b=1 \\ a\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

13. Să se determine o funcţie polinomială P, de grad cel mult doi, care verifică condiţiile $P(1)=1$, $P'(1)=0$, $P''(1)=2$.

a) $-x^2+2x+2$; b) x^2-2x+2; c) x^2+x+1; d) x^2+x+2; e) $-x^2+2x$;
f) $-x^2-2x-2$.

Soluţie. Avem $f=ax^2+bx+c$, unde $a,b,c\in\mathbb{R}$. Condiţiile din enunţ se rescriu:

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ 2a+b=0 \\ 2a=2 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=2.\end{cases}$$

14. Să se calculeze $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2+x^2\cos x}$.

a) ∞; b) 0; c) 1; d) limita nu există; e) $\frac{1}{2}$; f) 2.

Soluţie. Avem $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\frac{1}{1+\cos x}=1^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

15. Să se rezolve inecuaţia $\ln e^x+xe^{\ln x}<2$.

a) $x\in(0,1)$; b) $x>0$; c) nu are soluţii; d) $x\in(0,e)$; e) $x\in(-2,1)$; f) $x>1$.

Soluţie. Avem $x>0$. Folosind egalitatea $\ln e^x=x$ inecuaţia se rescrie $x+x^2-2<0$, deci $x\in(-2,1)\cap(0,\infty)=(0,1)$.

16. Suma numerelor naturale n ce satisfac inegalitatea $\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot C_n^2<8$ este

a) 10; b) 6; c) 7; d) 5; e) 8; f) 9.

Soluţie. Existenţa fracţiei din enunţ conduce la restricţia $n>0$, iar existenţa combinărilor cere $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$. Inecuaţia se rescrie

$$\frac{n+1}{n}\frac{(n-1)n}{2}<8\Leftrightarrow n^2-17<0\Leftrightarrow n\in[-\sqrt{17},\sqrt{17}].$$

Deci $n\in[-\sqrt{17},\sqrt{17}]\cap\{2,3,4,5,\dots\}=\{2,3,4\}$. Soluţia căutată este prin urmare $2+3+4=9$.

17. Matricea $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$ cu $a\in\mathbb{R}$, este inversabilă pentru

a) $a\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$; b) $a\in\{-1,0\}$; c) $a\in\mathbb{R}$; d) $a\neq 0$; e) $a\neq -1$; f) nu există.

Soluţie. Determinantul matricei A se obţine (spre exemplu) adunând în prealabil a dolua linie a acestuia la celelalte două linii:

$$\det A=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 2 & 1 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+1 & 0 & a+1 \\ 1 & -1 & a \\ 3 & 0 & a+3\end{vmatrix}=-(a+1)a.$$

Prin urmare condiţia ca A să fie inversabilă este $\det A\neq 0\Leftrightarrow a\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$.

18. Suma pătratelor soluţiilor ecuaţiei $x^2-4x+1=0$ este

a) 14; b) 12; c) -12; d) 16; e) 10; f) 4.

Soluţie. Avem $x_1+x_2=4, x_1x_2=1$ şi deci $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=14$.