

1. Să se rezolve inecuația $3x - 1 < 2x + 2$. (6 pct.)
a) (1, 4); b) (-1, 1); c) (2, ∞); d) (5, 11); e) (10, ∞); f) ($-\infty$, 3).

Soluție. Inecuația se rescrie: $3x - 1 < 2x + 2 \Leftrightarrow x < 3$, deci $x \in (-\infty, 3)$. (f)

2. Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$. (6 pct.)

a) 4; b) 2; c) -11; d) -3; e) -2; f) 9.

Soluție. Metoda 1. Scăzând dublul liniei a treia din prima linie și apoi dezvoltând după prima coloană, obținem:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -4 & -5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -12 + 10 = -2.$$

Metoda 2. Dezvoltăm determinantul folosind regula lui Sarrus; rezultă $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (12+0+0) - (2+0+12) = -2$. (e)

3. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 2x$. Să se calculeze $f'(1)$. (6 pct.)
a) 3; b) -1; c) 4; d) 6; e) 7; f) 5.

Soluție. Derivând funcția f , obținem $f'(x) = 3x^2 + 2$, deci $f'(1) = 3 + 2 = 5$. (f)

4. Să se rezolve ecuația $3^{2x-1} = 27$. (6 pct.)
a) $x = 4$; b) $x = 0$; c) $x = -1$; d) $x = 1$; e) $x = 2$; f) $x = -2$.

Soluție. Logaritmând ecuația în baza 3, obținem $3^{2x-1} = 3^3 \Leftrightarrow 2x - 1 = 3 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$. (e)

5. Să se rezolve ecuația $\log_2(x+1) = 3$. (6 pct.)
a) $x = 4$; b) $x = 2$; c) $x = 1$; d) $x = 5$; e) $x = 6$; f) $x = 7$.

Soluție. Condiția de existență a logaritmului este $x + 1 > 0$, deci $x \in (-1, \infty)$. Obținem succesiv: $\log_2(x+1) = 3 \Leftrightarrow 2^3 = x+1 \Rightarrow x = 7 \in (-1, \infty)$. (f)

6. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$. (6 pct.)

a) $x = 4, y = 1$; b) $x = 1, y = 4$; c) $x = 2, y = 4$; d) $x = 1, y = 3$; e) $x = 2, y = 3$; f) $x = 2, y = 2$.

Soluție. Metoda 1. Extrăgând x din a doua ecuație și apoi înlocuind în prima, obținem: $x = 6 - 2y \Rightarrow 2(6 - 2y) - y = 7 \Leftrightarrow -4y - y = 7 - 12 \Leftrightarrow -5y = -5 \Leftrightarrow y = 1$. Apoi, din a doua ecuație, rezultă $x = 6 - 2y = 6 - 2 \cdot 1 = 4$. Deci $x = 4, y = 1$. **Metoda 2.** Scăzând din prima ecuație dublul ecuației a doua, obținem $2x - y - (2x + 4y) = 7 - 2 \cdot 6 \Leftrightarrow -5y = -5 \Leftrightarrow y = 1$; înlocuind în ecuația a doua, obținem $x + 2 = 6 \Leftrightarrow x = 4$, deci $x = 4, y = 1$. **Metoda 3.** Sistemul are numărul de ecuații egal cu cel al necunoscutelor, iar determinantul matricei coeficienților necunoscutelor este nenul, $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$. Deci sistemul este Cramer, compatibil determinat, cu soluțiile $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{1}{5} \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = \frac{20}{5} = 4$, iar $y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{1}{5} \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = \frac{5}{5} = 1$, și prin urmare $x = 4, y = 1$. (a)

7. Să se calculeze suma soluțiilor reale ale ecuației $x^3 + 2x^2 - 3x = 0$. (6 pct.)
a) -3; b) -1; c) 3; d) 4; e) 2; f) -2.

Soluție. Metoda 1. Ecuația se rescrie: $x^3 + 2x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 2x - 3) = 0$, deci admite soluția $x_1 = 0$, iar rădăcinile polinomului din paranteză sunt $x_{2,3} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \in \{-3, 1\}$. Atunci $x_1 + x_2 + x_3 = 0 - 3 + 1 = -2$. **Metoda 2.** Din prima relație Viète, obținem $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{2}{1} = -2$. **Metoda 3.** Polinomul ecuației nu are termen liber, deci admite rădăcina $x_1 = 0$. Același polinom are suma coeficienților nulă, deci admite rădăcina $x_2 = 1$. Deci polinomul dat se divide prin $x(x-1) = x^2 - x$. După efectuarea împărțirii (sau aplicând repetat schema lui Horner), obținem câtul $x+3$, deci polinomul admite și rădăcina $x_3 = -3$. Deci $x_1 + x_2 + x_3 = 0 + 1 + (-3) = -2$. (f)

8. Mulțimea soluțiilor inecuației $x^2 - 3x \leq 0$ este: **(6 pct.)**

a) $(3, \infty)$; b) $[0, 3]$; c) $[-1, 3]$; d) $[1, \infty)$; e) $[2, \infty)$; f) $(-3, 3)$.

Soluție. Inecuația devine $x^2 - 3x \leq 0 \Leftrightarrow x(x - 3) \leq 0$, deci $x \in [x_1, x_2]$, unde $x_1 < x_2$ sunt cele două rădăcini distincte ale ecuației asociate $x(x - 3) = 0$. Deci $x \in [0, 3]$. **(6)**

9. Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel încât numerele $x, 8, 3x + 2$ să fie (în această ordine) în progresie aritmetică. **(6 pct.)**

a) $\frac{2}{5}$; b) $\frac{3}{4}$; c) $\frac{5}{2}$; d) $\frac{1}{3}$; e) $\frac{7}{2}$; f) $\frac{1}{6}$.

Soluție. Metoda 1. Al doilea număr trebuie să fie media aritmetică a celorlalte două valori, deci $8 = \frac{x + (3x + 2)}{2} \Leftrightarrow 16 = 4x + 2 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}$. **Metoda 2.** Rația este diferența dintre doi termeni consecutivi ai progresiei, deci egalând cele două diferențe care dau rația, obținem: $8 - x = (3x + 2) - 8 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}$. **(6)**

10. Fie $M = \left\{ X \in M_2(\mathbb{C}) \mid X^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \right\}$, unde $M_2(\mathbb{C})$ reprezintă mulțimea matricelor pătratice de ordinul doi, cu elemente în \mathbb{C} . Pentru $X \in M$, notăm cu $S(X)$ suma pătratelor elementelor matricii X . Să se calculeze $S = \sum_{X \in M} S(X)$. **(6 pct.)**

a) $S = 3$; b) $S = 4$; c) $S = 5$; d) $S = 11$; e) $S = 7$; f) $S = 1$.

Soluție. Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M$. Atunci egalitatea $X^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ se rescrie ca sistem algebric cu necunoscutele a, b, c, d :

$$\begin{cases} a^2 + bc = -1 \\ b(a + d) = -2 \\ c(a + d) = 4 \\ bc + d^2 = -1 \end{cases} \quad \text{. Din a doua și a treia ecuație rezultă că } b, c \text{ și } a + d \text{ nu pot fi nule.}$$

Scăzând ultima ecuație din prima, se obține

$$d^2 - a^2 = 0 \Leftrightarrow (d + a)(d - a) = 0 \Leftrightarrow d = \pm a.$$

Dar $d + a \neq 0$, deci $d = a$. Împărțind ecuația a doua la a treia, obținem $\frac{b}{c} = \frac{-2}{4}$, deci

$$c = -2b, \tag{1}$$

iar sistemul devine

$$\begin{cases} a^2 - 2b^2 = -1 \\ ab = -1. \end{cases} \tag{2}$$

Scăzând a doua ecuație din prima rezultă $a^2 - ab - 2b^2 = 0$, ecuație omogenă de gradul 2. Împărțind ecuația omogenă la $b^2 \neq 0$ și notând $k = \frac{a}{b}$, rezultă

$$k^2 - k - 2 = 0 \Leftrightarrow k \in \{-1, 2\} \Rightarrow \frac{a}{b} \in \{-1, 2\} \Leftrightarrow b \in \{-a, 2a\},$$

deci distingem cazurile

(i) $b = -a$, caz în care înlocuind în (2) rezultă $b^2 = 1 \Leftrightarrow b \in \{-1, 1\}$.

Pentru $b = 1$ rezultă $a = -1 = d$ iar din (1), obținem $c = -2b = -2$ și avem soluția $X_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Pentru $b = -1$ rezultă $a = 1 = d$, iar din (1), obținem $c = -2b = 2$ și avem soluția $X_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(ii) $a = 2b$, caz în care înlocuind în (2) rezultă $2b^2 = -1 \Leftrightarrow b \in \{-\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}\}$.

Pentru $b = -\frac{i}{\sqrt{2}}$, rezultă $a = d = 2b = -2\frac{i}{\sqrt{2}}$, iar $c = -2b = 2\frac{i}{\sqrt{2}}$; avem soluția $X_3 = -\frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Pentru $b = \frac{i}{\sqrt{2}}$, rezultă $a = d = 2b = 2\frac{i}{\sqrt{2}}$, iar $c = -2b = -2\frac{i}{\sqrt{2}}$; avem soluția $X_4 = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

În concluzie, $M = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ și

$$S = S(X_1) + S(X_2) + S(X_3) + S(X_4) = 2 \cdot (1 + 1 + 4 + 1) + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (4 + 1 + 4 + 4) = 14 - 13 = 1,$$

deci $S = 1$. **(6)**

11. Suma soluțiilor reale ale ecuației $\sqrt{2x+1} = x-1$ este: **(6 pct.)**

a) 4; b) 0; c) 1; d) 2; e) 3; f) 5.

Soluție. Condiția de existență a radicalului conduce la $2x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$. În plus, pozitivitatea radicalului conduce la $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$, deci în final $x \in [1, \infty)$. Ridicând la pătrat ecuația din enunț, rezultă $2x+1 = (x-1)^2 \Leftrightarrow x^2-4x=0 \Leftrightarrow x \in \{0, 4\}$. Dar singura soluție care satisface condiția $x \in [1, \infty)$ este soluția $x=4$, deci suma soluțiilor este 4. **(a)**

12. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul
$$\begin{cases} ax - y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$$
 să aibă și soluții nenule. **(6 pct.)**

a) $a = -5$; b) $a = 5$; c) $a = 1$; d) $a = -2$; e) $a = 4$; f) $a = -4$.

Soluție. Sistemul este omogen și admite și soluții nebanale d.n.d. rangul matricei coeficienților necunoscutelor este mai mic decât numărul de necunoscute. În cazul nostru, această condiție revine la anularea determinantului matricei coeficienților necunoscutelor. Acesta este $\begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (2a+1+2) - (1-4-a) = 3a+6$, și se anulează pentru $a = -2$. **(d)**

13. Considerăm funcția $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\pi}{2} - 2\arctg\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, dacă $x \in (-1, 1]$, și $f(-1) = -\frac{\pi}{2}$. Fie $M = \{m \in \mathbb{R} \mid \text{ecuația } f(x) = mx \text{ are trei soluții reale și distincte}\}$. Atunci: **(6 pct.)**

a) $M = (0, \frac{\pi}{4}]$; b) $M = (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$; c) $M = [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$; d) $M = [0, \frac{\pi}{3}]$; e) $M = [1, \frac{\pi}{4}]$; f) $M = (1, \frac{\pi}{2}]$.

Soluție. Discutăm ecuația $f(x) = mx$, pentru $x \in [-1, 1]$. Se observă că $x=0$ satisface ecuația. Pentru $x \in [-1, 0) \cup (0, 1]$ căutăm $m \in \mathbb{R}$ pentru care ecuația are două soluții distincte. Deoarece $x \neq 0$, împărțind prin x , ecuația se rescrie $h(x) = 0$, unde

$$h(x) = \frac{f(x)}{x} - m = \frac{1}{x} \left(\frac{\pi}{2} - 2 \arctg \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right) - m.$$

Se verifică ușor că are loc tabelul de variație:

x	-1		0		1		
$h'(x)$	-	-	-		+	+	+
$h(x)$	$\frac{\pi}{2} - m$	\searrow	$1 - m$		$1 - m$	\nearrow	$\frac{\pi}{2} - m$

Dorim ca ecuația $h(x) = 0$ să aibă soluții în fiecare din intervalele $x \in [-1, 0)$ și $x \in (0, 1]$, ceea ce revine la $0 \in (1-m, \frac{\pi}{2}-m]$, adică $1-m < 0 \leq \frac{\pi}{2}-m$, de unde obținem $m \in (1, \frac{\pi}{2}]$. **(f)**

Notă. Soluția se simplifică semnificativ, dacă observăm că $f(x) = \arcsin x$, $\forall x \in [-1, 1]$. Pentru a arăta acest lucru, constatăm că pentru $x \in (-1, 1]$, notând $\alpha = f(x)$, rezultă $\operatorname{tg}(f(x)) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, deci $f(x) = \arctg \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; apoi notând $\sin t = x$ rezultă $f(x) = t$, deci $f(x) = \arcsin x$ pentru $x \in (-1, 1]$. Egalitatea are loc pe întregul interval $[-1, 1]$ deoarece $f(x)$ și $\arcsin x$ sunt continue pe $[-1, 1]$, derivabile cu aceeași derivată $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pe $(-1, 1)$ și coincid la capetele intervalului $[-1, 1]$.

14. Fie polinoamele $f = X^3 + aX^2 + 18$ și $g = X^3 + bX + 12$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. Să se calculeze $S = a + b$ știind că polinoamele f și g au două rădăcini comune. **(6 pct.)**

a) $S = 0$; b) $S = 1$; c) $S = 3$; d) $S = -2$; e) $S = 4$; f) $S = -1$.

Soluție. Fie $f = X^3 + aX^2 + 18 = (X-m)(X-n)(X-p)$, $g = X^3 + bX + 12 = (X-m)(X-n)(X-q)$ ($m, n, p, q \in \mathbb{C}$). Se observă că f și g au coeficienți reali, deci $p, q \in \mathbb{R}$ iar m, n sunt fie reale, fie complexe conjugate. Din egalitățile de mai sus rezultă prin scădere $f - g = (q-p)d = aX^2 - bX + 6$, unde $p \neq q$ și $a \neq 0$ (altfel se contrazice ultima egalitate). Atunci, asemenea lui d , $f - g$ divide f , deci restul r al împărțirii lui f la $aX^2 - bX + 6$ este identic nul. Prin calcul direct se obține restul acestei împărțiri, $r(x) = \frac{a^2b+b^2-6a}{a^2}x + \frac{6(2a^2-b)}{a^2}$, care este identic nul d.n.d. $a = 1$ și $b = 2$. Deci $S = a + b = 3$. **(c)**

Notă. Folosind valorile obținute pentru a și b , se obțin succesiv $\{m, n\} = \{1 \pm i\sqrt{5}\}$, $p = -3$ și $q = -2$.

15. Pentru $a > 0$, considerăm funcția $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}_+$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Dacă $V(a)$ este volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției f în jurul axei Ox , să se calculeze $\lim_{a \rightarrow \infty} V(a)$. (6 pct.)

a) $\frac{\pi^2}{3}$; b) π^2 ; c) $\frac{\pi^2}{4}$; d) $\frac{\pi^2}{2}$; e) $\frac{\pi^2}{6}$; f) $\frac{\pi^2}{8}$.

Soluție. Volumul este dat de formula $V(a) = \pi \int_0^a f^2(x) dx = \pi \int_0^a \frac{dx}{(1+x^2)^2}$. Calculăm integrala nedefinită asociată $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$, plecând de la $\arctg x = \int \frac{dx}{1+x^2}$ și integrând prin părți:

$$\begin{aligned} \arctg x &= \int \frac{dx}{1+x^2} = \int \frac{1}{1+x^2} (x)' dx = \frac{x}{1+x^2} - \int x \cdot \frac{-2x}{(1+x^2)^2} dx \\ &= \frac{x}{1+x^2} + 2 \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx = \frac{x}{1+x^2} + 2 \int \frac{(1+x^2) - 1}{(1+x^2)^2} dx \\ &= \frac{x}{1+x^2} + 2 \left(\int \frac{1}{1+x^2} dx - \int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx \right) \end{aligned}$$

deci

$$\arctg x = \frac{x}{1+x^2} + 2 \arctg x - 2 \int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx,$$

de unde rezultă

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{1+x^2} + \arctg x \right).$$

Prin urmare

$$V(a) = \pi \cdot \int_0^a \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \pi \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{x}{1+x^2} + \arctg x \right) \Big|_0^a = \frac{\pi}{2} \left(\frac{a}{1+a^2} + \arctg a \right),$$

și deci

$$\lim_{a \rightarrow \infty} V(a) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2} \left(\frac{a}{1+a^2} + \arctg a \right) = \frac{\pi}{2} \left(0 + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi^2}{4}. \quad \text{©}$$