1. Mulţimea soluţiilor inecuaţiei $x^2 + x - 2 \leq 0$ este: **(6 pct.)**

   a) $(1, \infty)$; b) $(-\infty, 2]$; c) $(0, 1)$; d) $(0, \infty)$; e) $[-2, 1]$; f) $[-3, -2)$.

   Soluţie. Ecuaţia $x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x - 1) = 0$ are soluţiile $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. Deci mulţimea soluţiilor inecuaţiei $x^2 + x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x - 1) \leq 0$ este intervalul $[x_1, x_2] = [-2, 1]$.

2. Să se calculeze determinantul $d = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$. **(6 pct.)**

   a) $d = 6$; b) $d = 12$; c) $d = 5$; d) $d = 14$; e) $d = -12$; f) $d = 18$.

   Soluţie. ***Metoda 1.*** Aplicând regula lui Sarrus, rezultă $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 8 + 27 - (6 + 6 + 6) = 18$. ***Metoda 2.*** Adunăm ultimele două coloane la prima, dăm factor 6 din prima coloană, scădem prima linie din următoarele două, apoi dezvoltăm după prima coloană. Obţinem:

   $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 6 \cdot 3 = 18.$$

3. Să se calculeze $\int_0^1 (x - x^2)dx$. **(6 pct.)**

   a) $\frac{1}{6}$; b) $\frac{1}{5}$; c) $\frac{1}{3}$; d) $\frac{3}{4}$; e) $\frac{2}{3}$; f) -1.

   Soluţie. Folosim formula $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$, $(a \neq -1,\ C \in \mathbb{R})$. Obţinem

   $$\int_0^1 (x - x^2)dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

4. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Să se calculeze $\det(A^2)$. **(6 pct.)**

   a) 4; b) 2; c) 3; d) 1; e) -1; f) 14.

   Soluţie. ***Metoda 1.*** Prin calcul direct, obţiem $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, deci $\det A^2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$. ***Metoda 2.*** Se observă că $\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, deci $\det(A^2) = (\det A)^2 = 1^2 = 1$.

5. Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{2 - x} = x$. **(6 pct.)**

   a) $x = 4$; b) $x = -1$; c) $x = -4$; d) $x = 1$; e) $x = 2$; f) $x = 6$.

   Soluţie. Condiţia de existenţă a radicalului este $2 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$. Pozitivitatea radicalului conduce la pozitivitatea membrului drept, deci $x \geq 0$. În concluzie soluţiile (dacă există), trebuie să satisfacă $x \in [0, 2]$. Ridicând la pătrat ecuaţia, rezultă $2 - x = x^2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x \in \{-2, 1\}$. Dar $-2 \notin [0, 2]$ şi $1 \in [0, 2]$, deci ecuaţia admite unica soluţie $x = 1$.

6. Fie numerele $a = 2016^{\sqrt{2014}}$, $b = 2015^{\sqrt{2015}}$, $c = 2014^{\sqrt{2016}}$. Care afirmaţie este adevărată? **(6 pct.)**

   a) $c > a > b$; b) $b > a > c$; c) $c > b > a$; d) $a > c > b$; e) $a > b > c$; f) $b > c > a$.

   Soluţie. Funcţia $f(x) = \sqrt{x + 1} \ln(x - 1) - \sqrt{x} \ln x$, $\forall x \in [2, \infty)$ admite un maxim local strict pozitiv într-un punct de abscisă $x_1 \in (62, 63)$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$ şi este strict descrescătoare pe intervalul $[x_1, \infty)$, deci este şi strict pozitivă pe acest interval; prin urmare, aplicând funcţia exponenţială, rezultă $f(2015) > 0 \Leftrightarrow 2014^{\sqrt{2016}} > 2015^{\sqrt{2015}}$, deci $c > b$. Funcţia $g(x) = \sqrt{x} \ln(x) - \sqrt{x - 1} \ln(x + 1)$, $\forall x \in [2, \infty)$ admite un maxim local strict pozitiv într-un punct de abscisă $x_2 \in (45, 46)$, $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 0$ şi este strict descrescătoare pe intervalul $[x_2, \infty)$, deci este şi strict pozitivă pe acest interval; prin urmare $g(2015) > 0 \Leftrightarrow 2015^{\sqrt{2015}} > 2016^{\sqrt{2014}}$, deci $b > a$. În concluzie, $c > b > a$.

7. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + e^x$. Să se calculeze $f''(0)$. **(6 pct.)**

   a) -2; b) 3; c) $\frac{1}{2}$; d) $2e$; e) $\frac{1}{3}$; f) $1 + e$.

   Soluţie. Avem $f''(x) = (x^2 + e^x)'' = (2x + e^x)' = 2 + e^x$, deci $f''(0) = 2 + e^0 = 3$.

8. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $x^3 - 5x^2 + 4x = 0$ este: **(6 pct.)**

a) $\{0, 1, 4\}$; b) $\{1, 7\}$; c) $\{4, 5\}$; d) $\{-1, 6\}$; e) $\{0, 2\}$; f) $\{-2, 3, 5\}$.

Soluţie. Ecuaţia se rescrie: $x(x^2 - 5x + 4) = 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x-4) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, 1, 4\}$.

9. Să se rezolve ecuaţia $5^{x+1} = 125$. **(6 pct.)**

a) $x = 6$; b) $x = 2$; c) $x = 3$; d) $x = 1$; e) $x = 4$; f) $x = 5$.

Soluţie. Ecuaţia se rescrie $5^{x+1} = 5^3 \Leftrightarrow x + 1 = 3 \Leftrightarrow x = 2$.

10. Suma soluţiilor ecuaţiei $x^2 - 7x + 12 = 0$ este: **(6 pct.)**

a) 5; b) 1; c) -6; d) 0; e) 6; f) 7.

Soluţie. ***Metoda 1.*** Prima relaţie Viete conduce la $x_1 + x_2 = -\frac{-7}{1} = 7$. ***Metoda 2.*** Rezolvăm ecuaţia: $x^2 - 7x + 12 = 0 \Leftrightarrow x \in \{3, 4\}$, deci $x_1 + x_2 = 3 + 4 = 7$.

11. Soluţia ecuaţiei $2x - 1 = 3$ este: **(6 pct.)**

a) $x = 3$; b) $x = 1$; c) $x = -3$; d) $x = 0$; e) $x = -1$; f) $x = 2$.

Soluţie. Obţinem $2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$.

12. Într-o progresie aritmetică primii doi termeni sunt $a_1 = 1$ şi $a_2 = 6$. Să se calculeze a_3. **(6 pct.)**

a) 9; b) 14; c) 8; d) 16; e) 12; f) 11.

Soluţie. ***Metoda 1.*** Raţia progresiei aritmetice este $r = a_2 - a_1 = 5$, deci $a_3 = a_2 + r = 11$. ***Metoda 2.*** Are loc egalitatea $2a_k = a_{k-1} + a_{k+1}$, $\forall k \geq 2$. Pentru $k = 2$, obţinem $2a_2 = a_1 + a_3$, deci $a_3 = 2a_2 - a_1 = 11$.

13. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^4+2x^3+3x^2+2x+10}{x^2+x+1}$. Să se calculeze valoarea minimă a funcţiei f. **(6 pct.)**

a) 3; b) 6; c) 11; d) 7; e) 9; f) 4.

Soluţie. ***Metoda 1.*** Pentru $t = \frac{x^2+x+1}{3}$ observăm că $x^2 + x + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci t este strict pozitiv. Atunci $f(x) = g(t) = 3(t + \frac{1}{t})$, iar $g'(t) = 3\frac{t^2-1}{t^2}$. Pentru $t > 0$, funcţia g are un minim local în punctul de abscisă $t = 1$, anume $g(1) = 3 \cdot 2 = 6$. Abscisa x corespunzătoare lui $t = 1$ rezultă din ecuaţia $\frac{x^2+x+1}{3} = 1$, care are soluţiile $x \in \{-2, 1\}$. ***Metoda 2.*** Observăm că $f(x) = x^2 + x + 1 + \frac{9}{x^2+x+1}$. Atunci $f'(x) = (2x+1)\left(1 - \frac{9}{(x^2+x+1)^2}\right)$. Aceasta se anulează în $x \in \{-2, -\frac{1}{2}, 1\}$. Studiem variaţia funcţiei f şi obţinem că punctele de minim ale lui f se află în punctele de abscisă $x \in \{-2, 1\}$, iar valoarea minimă corespunzătoare este $f(-2) = f(1) = 6$. ***Metoda 3.*** Pentru $t = \frac{x^2+x+1}{3}$ observăm că $x^2 + x + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci t este strict pozitiv. Atunci se poate aplica inegalitatea mediilor, $f(x) = 3(t + \frac{1}{t}) \geq 3 \cdot \sqrt{t \cdot \frac{1}{t}} = 1$, iar f îşi atinge minimul pentru $t = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2+x+1}{3} = 1 \Leftrightarrow x \in \{-2, 1\}$.

14. Fie $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{(1+x^2)(1+x^3)}$ şi $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \displaystyle\int_{1/x}^{1} f(t)dt - \int_{1}^{x} t^3 f(t)dt + \ln x$. Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei g în punctul de abscisă $x = 1$ este: **(6 pct.)**

a) $y = \frac{1}{2}(x-1)$; b) $y = e(1-x)$; c) $y = x - 1$; d) $y = 1 - x$; e) $y = e(x-1)$; f) $y = 2(1-x)$.

Soluţie. Se observă că făcând schimbarea de variabilă $s = \frac{1}{t}$ (de unde $dt = -\frac{1}{s^2}ds$), rezultă

$$\int_{1/x}^{1} f(t)dt = \int_{x}^{1} \frac{s^5}{(1+s^2)(1+s^3)} \frac{-1}{s^2} ds = \int_{1}^{x} s^3 \cdot \frac{1}{(1+s^2)(1+s^3)} ds = \int_{1}^{x} t^3 f(t)dt,$$

deci integralele din expresia funcţiei g se reduc. Atunci $g(x) = \ln x$, $g'(x) = \frac{1}{x}$ iar $g'(1) = 1$. Dar $g(1) = 0$, deci dreapta căutată are ecuaţia $y - g(1) = g'(1)(x-1) \Leftrightarrow y = x - 1$.

15. Notăm cu α partea reală a unei rădăcini din $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ a polinomului $f = X^3 - X^2 - X - 1$. Atunci: **(6 pct.)**

a) $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$; b) $\alpha \in (\frac{1}{9}, \frac{1}{4})$; c) $\alpha \in (-2, -1)$; d) $\alpha \in (-1, -\frac{1}{2})$; e) $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$; f) $\alpha \in (-\frac{1}{2}, 0)$.

Soluţie. Pentru studiul rădăcinilor reale ale lui f cu şirul lui Rolle, se observă că derivata $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$ se anulează în punctele $x \in \{-\frac{1}{3}, 1\}$ şi avem: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty < 0$, $f(-\frac{1}{3}) = -\frac{22}{27} < 0$, $f(1) = -2 < 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty > 0$, deci f schimbă semnul în intervlul $(1, \infty)$. De asemenea, $f(2) = 1 > 0$, deci unica rădăcină reală $x_1 = a \in \mathbb{R}$ a funcţiei f se află în intervalul $(1, 2)$. Dacă $x_{2,3} = \alpha \pm i\beta$ $(d \neq 0)$ sunt cele două rădăcini complexe conjugate ale lui f, din prima relaţie Viete se obţine $a + 2\alpha = 1$, unde $a \in (1, 2)$; înlocuind $a = 1 - 2\alpha$ în inegalităţile $1 < a < 2$, rezultă $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$, deci $\alpha \in (-\frac{1}{2}, 0)$.